一、代数 2
1 整除 2
1.1 整除 2
1.2 因数、倍数 2
1.3 素因数、合因数 2
1.4 公因数、最大公因数 3
1.5 公倍数、最小公倍数 3
1.6 短除法求两个数的最大公因数和最小公倍数 3
1.7 短除法求三个数的最大公因数和最小公倍数 4
1.8 例题 4
2 分数 4
2.1 性质 4
2.2 运算 5
2.3 分数与小数转换 5
2.4 分数与小数运算 6
3 有理数 6
3.1 数的分类（两种分法） 6
3.2 有理数 6
3.3 有理数运算 7
4 简单的代数式 8
4.1 代数式 8
4.2 一次式 8
5 一元一次方程 9
5.1 一元一次方程 9
5.2 一元一次方程应用题 9
6 二元一次方程组 9
7 一元一次不等式组 10
7.1 一元一次不等式 10
7.2 一元一次不等式组 10
8 整式 10
8.1 整式 10
8.2 因式分解 11
9 分式 12
9.1 分式 12
9.2 分式方程 13
10 实数 13
10.1 开平方 13
10.2 开立方 13
10.3 开方 13
10.4 实数 13
10.5 科学计数法 13
10.6 近似数 14
11 二次根式 14
11.1 二次根式 14
11.2 最简二次根式 14
12 一元二次方程 15
12.1 一元二次方程的一般形式 15
12.2 一元二次方程的解法 15

13 平面直角坐标系 16
13.1 平面直角坐标系 16
13.2 坐标系中点的运动 16
14 正反比例函数 17
14.1 函数 17
14.3 反比例函数 18
15 一次函数 18
15.1 一次函数 18
16 代数式方程 19
16.1 整式方程 19
16.2 分式方程 20
16.3 无理方程 20
16.4 二元二次方程组 20
16.5 应用题 21
17 二次函数 21
二、几何 21
1 线 21
2 角 22
3 图形的运动 23
4 直角三角形 24

一、代数

1 整除

1.1 整除

- 如果 a÷b=c 或 a=b×c，且 a、b、c 都是整数（注意 a、b、c 可以是负整数，如果任一为小数、分数，则不是整除），则 a 能被 b 整除，b 能整除 a；同时，a 能被 c 整除，c 能整除 a，如 18÷9=2，则 18 被 9 整除，9 能整除 18
- 能被 2 整除的数的个位是 0、2、4、6、8（偶数，注意-2 也是偶数），不能被 2 整除的数的个位是 1、3、5、7、9（奇数），能被 3 整除的数的各位数字之和能被 3 整除，能被 5 整除的数的个位是 0、5，能被 9 整除的数的各位数字之和能被 9 整除

1.2 因数、倍数

- 18=□×□，则 2 个□是 18 的因数，18 是 2 个□的倍数
- 18=1×18，18=2×9，18=3×6，因此 18 的因数有 1、18、2、9、3、6，整数的最小因数是 1，最大因数是自己

1.3 素因数、合因数

- 18=1×18=1×2×9=1×2×3×3，无法再分解了；18=2×9=2×3×3，无法再分解了；18=3×6=3×2×3，无法再分解了，可见不管选哪两个因数，18 分解到最后只有唯一结果（2×3×3），反过来 2、3、3 中的任意一个、两个、三个相乘，就构成了 18 的全部因数（除 1 外），即 2、3、6（2×3）、9（3×3）、18（2×3×3），且相乘的数越多，就是越大的那个因数
- 2、3 是不能再分解的数（即 2 分解为□×□时，□只能是 1 和 2 自己，不能分解为其它的□），称为素数；100 以内的素数有 25 个：2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97

- 而 18、9、6 分解为□×□时，□可以是除 1 和自己之外的数，18、9、6 称为合数
- 2、3 是 18 的素因数，18、9、6 是 18 的合因数，1 是 18 的非素数、非合数的因数，18 分解为含合因数时还可以再分解，分解为全部是素因数时，就不能再分解了；正整数分为 1、合数、素数
- 短除法分解素因数：先用最小的素数去除，然后用次小的素数去除，直到商为素数为止，最后要将所有素因数按从小到大顺序连乘起来

```
 2 | 18    2|12
 3 | 9     2| 6
     3       3
18=2×3×3   12=2×2×3
```

1.4 公因数、最大公因数

- 18=2×3×3，18 的素因数是 2、3、3，他们中的任意一个、两个或三个相乘，构成了 18 的所有非 1 的因数，即 2、3、6（2×3）、9（3×3）、18（2×3×3）
- 12=2×2×3，12 的素因数是 2、2、3，他们中的任意一个、两个或三个相乘，构成了 12 的所有非 1 的因数，即 2、3、4（2×2）、6（2×3）、12（2×2×3）
- 如果 18 和 12 有相同的因数（公因数），由于它是 18 的因数，所以它是 18 的几个素因数之积，由于它又是 12 的因数，所有它又是 12 的几个素因素之积，因为一个数只能分解为唯一的几个素因数之积，所以 18 的这几个素因数一定和 12 的几个素因数相同
- 18 和 12 的公因数中最大的那个公因数（最大公因数），一定是 18 和 12 所有相同的素因数之积
- 如果两个整数的最大公因数是 1，则它们互素；如果一个整数是另一个整数的因数，则这个整数就是它们的最大公因数

1.5 公倍数、最小公倍数

- 18×12 既是 18 的倍数，又是 12 的倍数（公倍数），而 18×12×2、18×12×3.....也是 18 和 12 的公倍数，所以 18 和 12 的公倍数有无数个
- 这些公倍数中最小的称为最小公倍数，18×12=2×3×3 × 2×2×3 是 18 和 12 的公倍数，18 和 12 的共同素因数有 2 和 2，3 和 3，如果去掉一套所有的相同素因数（2 和 3），保留一套（2 和 3），~~2×3×3~~ × 2×2×3 = 3×2×2×3，这里既包含了 18 的所有素因数 2×3×3（虽然去掉了一套 2 和 3，但保留了一套 2 和 3），使得它是 18 的倍数，又包含了 12 的所有素因数 2×2×3，使得它是 12 的倍数，而且除了 18 和 12 的所有素因数外，没有其它的素因数，因此它是最小公倍数；18 和 12 的最小公倍数的素因数都在 18 和 12 的素因数中，18 和 12 的素因数也都在最小公倍数的素因数中
- A、B 的最大公因数 $c = c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n$，最小公倍数 $d = c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n \times d_1 \times d_2 \times \ldots \times d_m$，则 $c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n$ 为 A 和 B 的都有部分，$d \div c = d_1 \times d_2 \times \ldots \times d_m$ 为 A 和 B 的分有部分，即 A=$c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n \times d_1 \times d_2 \times \ldots \times d_k$，B=$c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n \times d_{k+1} \times d_{k+2} \times \ldots \times d_m$，A 中所有的$d_i$和 B 中的所有$d_j$都不相同（否则 A、B 就有不在最大公因数 C 中的相同素因数），A×B=$c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n \times c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n \times d_1 \times d_2 \times \ldots \times d_m = \textit{最大公因数}c \times \textit{最小公倍数}d$，如 A×B=144=2×2×2×2×3×3，A 和 B 的最小公倍数 36=2×2×3×3，则 A 和 B 的最大公因数是 4=144÷36=2×2，则 A=2×2×□，B=2×2×Δ，而□和Δ瓜分 36÷4=9=3×3 这两个素因数，且□瓜分的素因数不能与Δ瓜分的素因数相同，因此只有一种瓜分方法，就是 3×3 都给□，而Δ=1，由此 A=2×2×3×3=36，B=2×2×1=4

1.6 短除法求两个数的最大公因数和最小公倍数

```
 2 | 18   12
 3 | 9    6
     3    2
```

- 先用公有的最小素数 2，然后用 3，然后用 5....，去除 18 和 12，分解出他们的相同素因数，直到商不能再分解（也就是两个商没有 1 之外的公有素因数，即互素）
- 2 和 3 是 18 和 12 的相同素因数，因此 2×3=6 是最大公因数，2×3×3×2=36 是最小公倍数（所有相同素因数、各自剩余素因数之积）

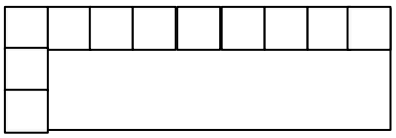
1.7 短除法求三个数的最大公因数和最小公倍数

2	16	24	60	先用三个数公有的最小素因数去除
2	8	12	30	继续用三个数公有的最小素因数去除
3	4	6	15	三个数没有公有素因数了，用两个数公有的素因数去除，另一个数不变（4）
2	4	2	5	三个数没有公有素因数了，用两个数公有的素因数去除，另一个数不变（5）
	2	1	5	三个商互素

- 最大公因数是三个数公有的素因数之积，2×2=4，最小公倍数是所有三个数公有的素因数、两个数公有的素因数、每个数剩余的素因数之积，2×2×3×2×2×5=240

1.8 例题

- 一块长 20 米，宽 8 米的长方形木板，锯成尽可能少的小正方形，而且锯完没有剩余，可以锯出多少块小正方形？

解析：  锯完没有剩余，说明长度和宽度都能整除正方形边长，即正方形边长是 20 和 8 的因数。锯成尽可能少的正方形，则说明边长要尽可能大，也就是 20 和 8 的最大公因数，因此边长是 4，长度可锯成 20÷4=5 段，宽度可锯成 8÷4=2 段，一共是 5×2=10 块长方形。

- A 与 B 的最小公倍数是 30，A 与 6 的最大公因数是 2，B 与 5 的最大公因数是 1，则 A 是___，B 是___。

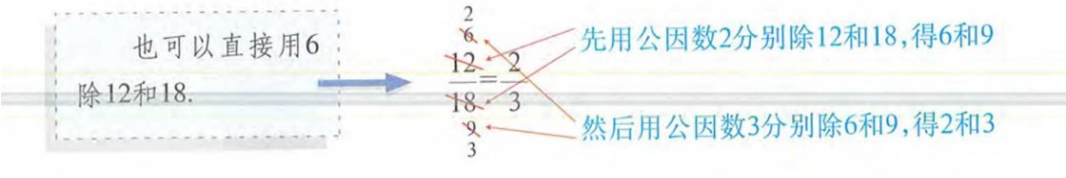
解析：最小公倍数 30=2×3×5，最小公倍数的素因数是 A、B 的相同素因数留一个，以及不相同的素因数，也就是说 A、B 都只可能是 2、3、5 中的一个、两个或三个素因数相乘。由于 A 与 6 的最大公因数是 2，而 6=2×3，A 和 6 都有公因数 2，而没有公因数 3，说明 A 有素因数 2，无素因数 3，因此 B 必须有素因数 3。B 与 5 的最大公因数是 1，说明 B 无素因数 5，因此 A 有素因数 5。由此确定 A 有素因数 2、5，A=2×5=10。B 无素因数 5，有素因数 3，而 2 可能有，也可能没有，所以 B=3 或 6。

2 分数

2.1 性质

- 分数：a、b 都为正整数，a÷b=$\frac{a}{b}$，读作 b 分之 a，a 为分子，b 为分母
- 分数的含义：分数=$\frac{分子}{分母}$的含义是，1 个单位的分母，能产出（或需要）$\frac{分子}{分母}$个单位的分子，如产出 9 千瓦时电需要 5 千克煤，则$\frac{9\ 千瓦时电}{5\ 千克煤}$是 1 千克煤（分母单位是千克），能产出（或需要）$\frac{9}{5}$千瓦时电（分子单位是千瓦时），而$\frac{5\ 千克煤}{9\ 千瓦时电}$是 1 千瓦时电（分母单位是千瓦时），能产出（或需要）$\frac{5}{9}$千克煤（分母单位是千克）
- 分数的应用：A 比 B 多或少几分之几（多或少百分之几），则大-小作分子，比字后面是 B，B 作分母，如 A 比 B 多几分之几，则$\frac{A-B}{B}$，如 B 比 A 少几分之几，则$\frac{A-B}{A}$，如 A 比 B 少几分之几，则$\frac{B-A}{B}$，如 B 比 A 多百分之几，则$\frac{B-A}{A}$
- 真分数是 a<b，如$\frac{1}{3}$，假分数是 a ⩾ b，如$\frac{4}{3}$，带分数是整数 + 真分数，如$1\frac{1}{3}$是带分数，带分数化为假分数：$1\frac{1}{3}=1+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，$-1\frac{1}{3}=-(1+\frac{1}{3})=-(\frac{3}{3}+\frac{1}{3})=-\frac{4}{3}$，或 $3\frac{5}{9}=\frac{3\times9+5}{9}=\frac{32}{9}$，假分数化为带分数：$\frac{32}{9}=\frac{27+5}{9}=\frac{27}{9}+\frac{5}{9}=3+\frac{5}{9}=3\frac{5}{9}$

- 分数性质：$\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k}=\frac{a\div k}{b\div k}(b\neq 0,k\neq 0)$，写出三个与$\frac{12}{30}$相等的且分母且小于 30 的分数，$\frac{12\div 2}{30\div 2}=\frac{6}{15}$，$\frac{12\div 3}{30\div 3}=\frac{4}{10}$，$\frac{12\div 6}{30\div 6}=\frac{2}{5}$
- 约分：分子和分母都除以相同公因数，如$\frac{3}{6}=\frac{3\div 3}{6\div 3}=\frac{1}{2}$，可简写为$\frac{3}{6}=\frac{\cancel{3}\ 1}{\cancel{6}\ 2}=\frac{1}{2}$
- 最简分数：分子、分母都约去最大公因数（最大公因数=分子、分母所有相同素因数之积），或者不断约去各公因数，最后使得分子和分母互素（无非 1 公因数），叫最简分数，如$\frac{10}{20}=\frac{\cancel{10}\ 1}{\cancel{20}\ 2}=\frac{1}{2}$



- 通分：两个异分母分数不能直接比较大小，也不能加减，如$\frac{5}{6}$、$\frac{7}{8}$无法直观比较大小，也无法直接加减，需要先使它们的分母相同，方法是将它们的分子和分母各自乘以一个数，使两个分数的分母为相同分母（一般为两个分母的最小公倍数），如通分$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{9}$，因为分母 3、4、9 的最小公倍数是 36，$\frac{1\times 12}{3\times 12}=\frac{12}{36}$，$\frac{3\times 9}{4\times 9}=\frac{27}{36}$，$\frac{5\times 4}{9\times 4}=\frac{20}{36}$，所以$\frac{1}{3}<\frac{5}{9}<\frac{3}{4}$

2.2 运算

- 运算的顺序、方法和整数一样，<u>带分数在加减时先变成整数+分数，乘除时先变成假分数，最后结果必须约分为最简分数，假分数需要化为带分数</u>，如$3\frac{25}{14}$应写成 $4\frac{11}{14}$
- 同分母时$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$（c≠0，<u>异分母的分数加减时先通分为同分母的分数</u>），$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$，$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}(b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0)$，即除法变为乘以倒数（a 的倒数是$\frac{1}{a}$，如-2 的倒数是$-\frac{1}{2}$，一个数×它的倒数=1）
- 例题 1：$3\frac{5}{12}-\frac{11}{4}=3+\frac{5}{12}-\frac{11}{4}=3+\frac{5}{12}-\frac{33}{12}=3+\frac{5-33}{12}=3-\frac{28}{12}=3-\frac{7}{3}=\frac{9}{3}-\frac{7}{3}=\frac{9-7}{3}=\frac{2}{3}$，带分数$3\frac{5}{12}$先变成$3+\frac{5}{12}$，计算量少，否则要变成假分数$3\frac{5}{12}=\frac{3\times 12+5}{12}=\frac{41}{12}$
- 例题 2：$\frac{8}{9}\times 13\frac{1}{2}=\frac{8}{9}\times\frac{27}{2}=\frac{\cancel{8}\ 4}{\cancel{9}\ 1}\times\frac{\cancel{27}\ 3}{\cancel{2}\ 1}=\frac{4\times 3}{1}=12$，<u>乘除法时带分数必须先变成假分数，约分时可一个分数的分母和另一个分数的分子进行约分</u>

2.3 分数与小数转换

- 分数一定能化为有限小数或无限循环小数（做除法即可得到小数，$\frac{3}{2}=3\div 2=1.5$），有限小数或无限循环小数一定能化为分数（变成分子为整数，分母为 10、100 等即可得到分数，如 1.5=$\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$，$0.89=\frac{89}{100}$）
- 如果最简分数的分母的素因数只有 2 和 5，则该分数可化为有限小数，否则化为无限循环小数，如$\frac{5}{6}=\frac{5}{2\times 3}$，$\frac{5}{6}$是最简分数，分母的素因数有 2 和 3，所以不能化为有限小数，如$\frac{3}{10}$是最简分数，$\frac{3}{10}=\frac{3}{2\times 5}$，分母

的素因数只有 2 和 5，所以可以化为有限小数

- 无限循环小数：一个小数从小数部分的某一位起，一个或几个数字不断重复，重复的一个或几个数字叫循环节，在第一个循环节的第一个和最后一个数字上加点，后面的循环节省略，如 0.33333333…记为 $0.\dot{3}$，0.0301301301…记为$0.0\dot{3}0\dot{1}$

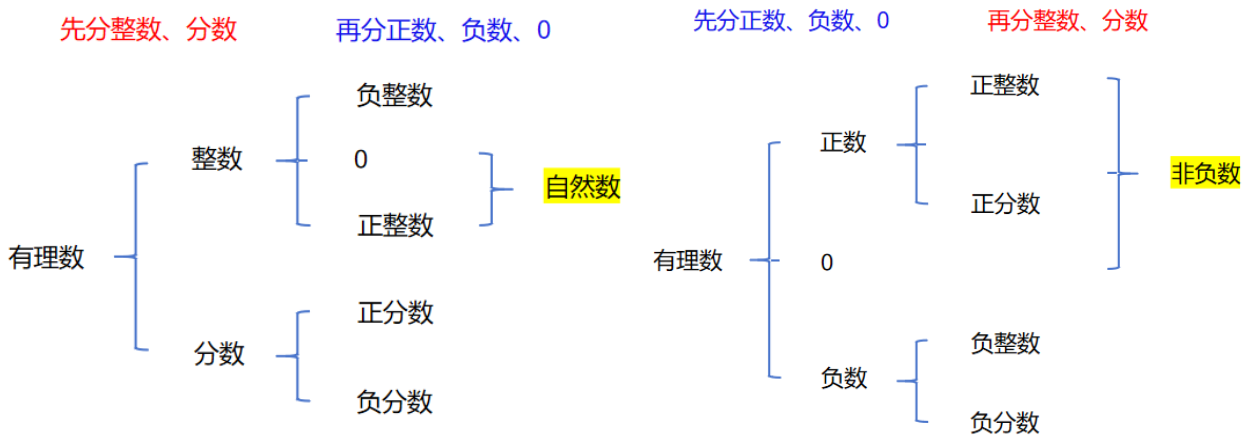
2.4 分数与小数运算

- 分数与小数运算时，可把小数化为分数然后运算，也可把分数化成有限小数然后运算（如果分数只能化成无限循环小数，则不能把分数化成小数进行计算），具体看哪种方法计算简单，如$\frac{3}{4}\times(2.5-\frac{1}{4})+\frac{5}{12}\div 0.25=\frac{3}{4}\times(\frac{\cancel{25}\ 5}{\cancel{10}\ 2}-\frac{1}{4})+\frac{5}{12}\div\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\times(\frac{5}{2}-\frac{1}{4})+\frac{5}{\cancel{12}\ 3}\times\cancel{4}=\frac{3}{4}\times(\frac{10}{4}-\frac{1}{4})+\frac{5}{3}=\frac{3}{4}\times\frac{9}{4}+\frac{5}{3}=\frac{27}{16}+\frac{5}{3}=\frac{27\times3}{16\times3}+\frac{5\times16}{3\times16}=\frac{81}{48}+\frac{80}{48}=\frac{161}{48}=3\frac{17}{48}$

- $\frac{1}{2}=0.5$，$\frac{1}{4}=0.25$，$\frac{3}{4}=0.75$，$\frac{1}{5}=0.2$，$\frac{2}{5}=0.4$，$\frac{3}{5}=0.6$，$\frac{4}{5}=0.8$，$\frac{1}{8}=0.125$，$\frac{3}{8}=0.375$，$\frac{5}{8}=0.625$，$\frac{7}{8}=0.875$

3 有理数

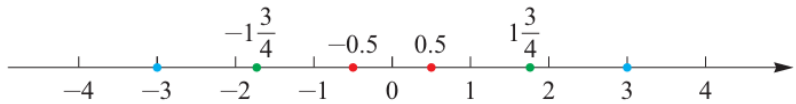
3.1 数的分类（两种分法）



- 正数、负数：表示意义相反的量，如零上 5 度写成+5（正 5，+号可省略），则零下 5 度写成-5（负 5）；赚钱写成+1000，亏损写成-1000
- 0：既不是正数，也不是负数
- 自然数：0 和正整数
- 非负数：0 和正数，比自然数多了正分数
- 有理数：能写成$\frac{a}{b}$（a、b 为整数，b≠0）的数

3.2 有理数

- 数轴：规定了原点 0，正方向为右，单位长度为 1 的直线，每一个有理数都可以用数轴上唯一的一个点表示，表示正数的点都在原点的右边，表示负数的点都在原点的左边，原点表示 0，数轴上越靠右的数越大，越靠左的数越小



- 相反数：x 和 − x互为相反数，0 的相反数是 0，相反数在数轴上原点两侧，他们到原点距离相等

- 绝对值：3 和-3 到原点距离相同，距离是物理量，不为负，3 到原点距离是 3，而-3 到原点距离是-(-3)=3（负负得正），假如规定绝对值符号的规则是|x|=x（x>0），|x|=0（x=0），|x|=-x（x<0），则无论 x 是正数还是负数，它到原点的距离都记作|x|（|x|肯定≥0），|0|=0 即 0 到原点距离是 0
- 有理数的大小：正数>0>负数；正数的绝对值越大，则正数越大；负数的绝对值越大，则负数越小

3.3 有理数运算

- 运算顺序：先算小括号，再算中括号，最后算大括号；同级则先乘方，后乘除，再加减
- 加减：10-15 可看成 10+(-15)，-15+10 可看成(-15)+10，因此可认为有理数的减法是加上负数，即只有加法没有减法
  - 有括号先去括号：括号前是+，则**去+**和括号，括号内不变，+(-2+1)=-2+1；括号前是-，则**去-**和括号，括号内每一项都变号，-(-2+1)=+2-1，注意-(2-3)，2 前面省略了+号，所以-(2-3)=-(+2-3)=-2+3
  - 正数+正数：符号为+，数字为两个数字相加，+3+2=+（3+2）=+5
  - 负数+负数：符号为-，数字为两个数字相加，-2-3=-（2+3）=-5，(-2)+(-3)=-(2+3)=-5
  - 正数+负数：符号为大数字的符号，数字为大数字-小数字，2-3=-(3-2)=-1，-1+2=+(2-1)=+1
  - 正数+真分数：$100+\frac{2}{3}=100\frac{2}{3}$
  - 正数-真分数：$100-\frac{2}{3}=99+1-\frac{2}{3}=99+\frac{1}{3}=99\frac{1}{3}$（正数拿出 1，1-真分数简单，不要$100-\frac{2}{3}=\frac{300}{3}-\frac{2}{3}=\frac{298}{3}=99\frac{1}{3}$）
  - 负数-真分数：$-100-\frac{2}{3}=-(100+\frac{2}{3})=-100\frac{2}{3}$
  - 负数+真分数：$-100+\frac{2}{3}=-(100-\frac{2}{3})=-(99+1-\frac{2}{3})=-(99+\frac{1}{3})=-99\frac{1}{3}$
- 倒数：a≠0 时，a 的倒数是$\frac{1}{a}$，即互为倒数的两个数的积为 1，如-$\frac{3}{4}$的倒数是$-\frac{4}{3}$
- 乘除：先写出最终结果的符号（奇数个负数乘除则符号为-，偶数个负数乘除符号为+），然后去掉各数的负号和括号（都变成正数），再数字相乘（除法变乘以倒数$\mathrm{a}\div\mathrm{b}=\mathrm{a}\times\frac{1}{\mathrm{b}}$，任何数 × 0 = 0），如$(-3)\times(-2)\div(-\frac{1}{2})=-3\times2\times2=-12$，【3 个负数相乘，最终符号为-】
- 乘方：$a^n=a\times a\times\ldots\times a$（即 n 个 a 相乘），$a^n$称为 a 的 n 次方，也称为 a 的 n 次幂，a 称为底数（a≠0），n 称为指数，$a^1=a$，$a^0=1$，$0^n=0$；a 为正数时，$a^n>0$；a 为负数时，n 为偶数时$a^n>0$，n 为奇数时$a^n<0$，如$2^3=2\times2\times2=8$，$-1\times2^3=-2^3$，$-2^3=-2\times2\times2=-8$，$(-2)^3=(-2)\times(-2)\times(-2)=-8$，$-(-2)^3=-(-2)\times(-2)\times(-2)=-(-8)=8$，$(-2)^4=(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)=16$；分数的乘方，分数要加括号，如正确写法$(\frac{1}{2})^3=(\frac{1}{2})\times(\frac{1}{2})\times(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}$，错误写法$\frac{1^3}{2}=\frac{1\times1\times1}{2}=\frac{1}{2}$
- 乘方数

	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}
$a=2$	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$a=3$	9	27	81	243					
$a=4$	16	64	256						
$a=5$	25	125							
$a=6$	36	216							
$a=7$	49								
$a=8$	64								
$a=9$	81								
$a=10$	100								
$a=11$	121								
$a=12$	144								
$a=13$	169								
$a=14$	196								
$a=15$	225								
$a=16$	256								
$a=17$	289								
$a=18$	324								
$a=19$	361								
$a=20$	400								

4 简单的代数式

4.1 代数式

- 代数式：用字母表示具体的数，有利于描述和研究问题，用若干+、-、×、÷、分号（如$\frac{1}{x}$）、乘方、开方、括号等运算符，连接字母和数字的式子叫代数式，没有运算符如 0、π、x、2a 也是代数式，而 x+1=2，x<3 不是代数式（=、<、>不是运算符）
- 书写规范：数与字母或字母与字母相乘时，×号可省略或用•表示，如 5×a 可以写成 5a 或 5•a；字母和数字相乘时，数字写在字母前面，如写 4x，不写 x4；当数字是 1 或－1 时可省略，如$1\times x$写成 x，$-1\times x$写成-x；当数字是带分数时要写成假分数，如 $1\frac{1}{2}x$写成$\frac{3}{2}x$；运算结果不出现除号，一般用分数形式表示，如 x÷3 要写成$\frac{x}{3}$
- 例题：用大小相同的木棒搭正方形，搭 1 个正方形需要 4 根木棒，搭 2 个、3 个、4 个正方形分别需要几根木棒？搭 n 个正方形需要几根木棒？

解析：搭第一个正方形需要 4 根木棒，从第二个正方形开始，每增加一个正方形，所需木棒的根数增加 3，搭 n 个则需要 4+3(n-1)个木棒

4.2 一次式

- 代数式的值：用具体数值代替代数式里的字母（即代数），按照代数式中的运算关系计算得出的结果叫作代数式的值，如 x=-2，y=$-\frac{1}{2}$，求代数式$3x^2-6xy+4y^2$的值，$3x^2-6xy+4y^2=3\times(-2)^2-6\times(-2)\times(-\frac{1}{2})+4\times(-\frac{1}{2})^2=3\times4-6+4\times\frac{1}{4}=12-6+1=7$，注意：<u>代入负数、分数进行乘法、乘方运算时，要添加括号</u>
- 一次式：代数式 5x－3y＋4 是 5x、－3y 和 4 的和，5x、－3y、4 称作代数式 5x－3y＋4 的项，5x、－3y 只含有一个字母，且字母的指数是 1，叫作一次项，不含字母的项叫作常数项，如+4，一次项中的数字叫作该一次项的系数，如 5x 中的 5，由一次项、常数项组成的代数式是一次式，字母相同的项叫作一次式的同类项，所有常数项都是同类项，同类项可以合并，合并时把系数相加，如 5x-3x=(5-3)x=2x
- 一次式加减：有理数的去括号、加减规则适用于一次式，如求 3x－2y＋1 减去 x＋y－2 的差，几个一次式相加减，通常用括号把每个一次式括起来，再用加减号连接，因此(3x-2y+1)-(x+y-2)=3x-2y+1-x-y+2=3x-x-2y-y+1+2=2x-3y+3

- 数与一次式相乘：用这个数去乘一次式的每一项，再把所得的积相加，如 3(2x+1)-2(1-x)=3×2x+3×1-2×1-2×(-x)=6x+3-2+2x=8x+1

5 一元一次方程

5.1 一元一次方程

- 等式性质：如果 a=b，则 a+c=b+c，a-c=b-c，ac=bc，$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}(c\neq 0)$
- 一元一次方程：含有未知数的等式是方程，未知数叫元，只含有一个未知数且未知数指数是 1 的方程叫作一元一次方程，一般形式为 ax=b（a≠0）
- 解方程：使方程左右相等的未知数的值叫方程的解，求解的过程叫解方程，解一元一次方程的步骤是先去括号，方程两边乘以或除以相同数（如为了去分母），移项（把一次项从方程右边移到左边，把常数项从左边移到右边，移项要变号），合并同类项，最后整理成 ax=b 形式，解为$x=\frac{b}{a}$，如$\frac{x+1}{0.3}-x=5$，为了计算简便，先把一次项的分子分母乘以 10，使分母变成整数，即$\frac{10(x+1)}{0.3\times 10}-x=5$，$\frac{10(x+1)}{3}-x=5$，为了计算简便，方程两边乘以 3 去分母，即$10(x+1)-3x=15$，10x+10-3x=15，移项变号，7x=15-10，7x=5，$x=\frac{5}{7}$

5.2 一元一次方程应用题

- 在解决应用问题的过程中，需要设适当的未知数，根据题意，列出一元一次方程，并求得方程的解

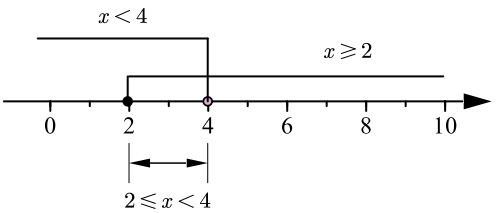
6 二元一次方程组

- 二元一次方程组：含有两个未知数且未知数最高次数为 1 的方程，叫二元一次方程，由两个二元一次方程组成的方程组，叫二元一次方程组，使得方程组中<u>每个方程左右相等的未知数的值</u>，是方程组的解，求解方法是消元，用代入或加减法去掉一个未知数，使二元一次方程变成一元一次方程
- 代入消元法：将一个未知数用另一个未知数表示并代入方程，如$\begin{cases}2x-3y=5①\\3x-4y=8②\end{cases}$，将方程①写成$x=\frac{3y+5}{2}$，然后代入方程②，得到$3\times\frac{3y+5}{2}-4y=8$，$y=1$，因此$x=\frac{3y+5}{2}=4$，方程组解为$\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$
- 加减消元法：将一个方程两边分别乘以或除以相同数（方程解不变），然后将新方程与另一个方程加减（两个方程左边±左边，右边±右边），从而去掉一个未知数，如$\begin{cases}2x+3y=6①\\4x+5y=7②\end{cases}$，方程②*的 $4x$ 是方程*①中 2x 的两倍，因此①×2－②*即可消去 x，①左右两边*×2：4x+6y=12③，③-②（左边-左边=右边-右边）：(4x+6y)-(4x+5y)=12-7，y=5，代入①，2x+3×5=6，$x=-\frac{9}{2}$，方程组解为$\begin{cases}x=-\frac{9}{2}\\y=5\end{cases}$
- 三元一次方程组：由三个一元一次方程组成的方程组，解法是用代入或加减法，先消元成二元一次方程组，再消元成一元一次方程，如$\begin{cases}x-y+z=0①\\x+y+z=-4②\\9x+3y+z=0③\end{cases}$，可以看出①-②，可以消去 x、z，得到 y=-2，代入①和③，得到$\begin{cases}x+z=-2⑤\\9x+z=6⑥\end{cases}$，⑤-⑥可消去 z，得到 x=1，代入⑤，得到 z=-3，因此方程组解为$\begin{cases}x=1\\y=-2\\z=-3\end{cases}$

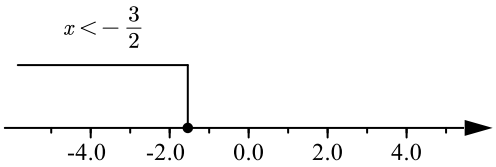
7 一元一次不等式组

7.1 一元一次不等式

- 不等式：=连接的式子是等式，>≥<≤连接的式子是不等式
  - 给定数 a、b，a>b，a<b，a=b 三种情形，有且仅有一种存在
  - 如果 a>b，b>c，则 a>c，对于≥<≤也存在这样的传递性
  - 不等式两边同时加、减一个数，不等号的方向不变，如 x<3，则 x+1<3+1，x-1<3-1
  - 不等式两边同时乘以或除以一个正数，不等号的方向不变，如 x<3，则 2x<6
  - 不等式两边同时乘以或除以一个负数，不等号的方向改变，如 x<3，则-2x>-6
  - 不等式一项从不等式的一边移到另一边，该项符号要变号，如$x-5<6$，$x<6+5$，$x<11$
- 一元一次不等式：只有一个未知数且未知数次数最高为 1 的不等式，是一元一次不等式，使不等式成立的未知数的所有值，构成不等式的解集，解集可用数轴表示，其中实心点包含该数，空心点不包含该数

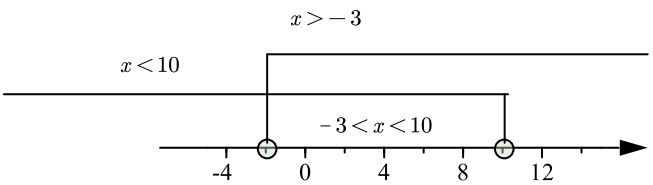


- 解一元一次不等式：化简不等式（去分母、去括号、移项、合并同类项）成 ax＞b（或 ax＜b）形式，然后两边除以 a，得到不等式的解集并在数轴上表示（注意，a＜0 时不等号变号），如$\frac{2x-5}{16}\geq\frac{4x+3}{2}+1$，两边乘以 16 去分母，2x-5≥8(4x+3)+16，去括号，2x-5≥32x+24+16，合并同类项，2x-5≥32x+40，将未知数移到左边，常数移到右边，移项要变号，2x-32x≥40+5，合并同类项，-30x≥45，两边除以-30，不等号变号，x≤$-\frac{3}{2}$，



7.2 一元一次不等式组

- 一元一次不等式组：由几个一元一次不等式组成的不等式组，所有不等式的解集的公共部分就是不等式组的解集，先求出不等式组中各个不等式的解集，并分别在数轴上表示出来，从数轴上找出各解集的公共部分，得到不等式组的解集，如$\begin{cases}4x>2x-6①\\10+3x>7x-30②\end{cases}$，①的解集是 x>-3，②的解集是 x<10，在数轴上分别表示出来，不等式组的解集是公共部分 -3<x<10，



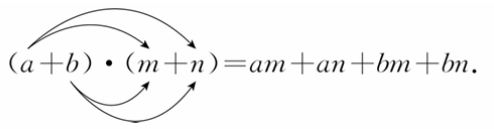
8 整式

8.1 整式

- 代数式包括整式（分母中无字母）、分式（分母中有字母）
- 单项式：运算符只有乘号、乘方、开方且分母中无字母的代数式，如$-\frac{1}{2}a^2$、$\frac{1}{5}$、c、ab^3，单项式中的数字是系数，所有字母的指数之和是次数，纯数字单项式的次数是 0，如单项式$-\frac{5x^4y^2}{11}$的系数是$-\frac{5}{11}$，次

数是 4+2=6，如单项式$\frac{1}{5}$的系数是$\frac{1}{5}$，次数是 0

- 同类项：<u>字母相同且相同字母的指数也相同，这样的单项式是同类单项式</u>，如$2a^2b^2$和$-3b^2a^2$是同类项，而$3x^2y$ 和 $2y^2x$ 不是同类项
- 整式：1 个或多个单项式加减构成整式，每个单项式是整式的一项，该单项式是几次，它就是整式的几次项，纯数字单项式是常数项，将整式中的各单项式按某个字母的次数排序，如该字母次数越小的单项式放在前，则是升幂排列，如该字母次数越大的单项式在前，则是降幂排列，如整式$3+6x^2y^3-2xy^4-5x^3y-4x^4y^2$，按 x 升幂排列是$3-2xy^4+6x^2y^3-5x^3y-4x^4y^2$，按 y 降幂排列是$-2xy^4+6x^2y^3-4x^4y^2-5x^3y+3$，<u>当整式中无同类项时，单项式数量是整式的项数，次数最高单项式的次数，是整式的次数</u>，如$x^4-x^2y+x^2y^3-y^3$，该整式没有同类项，次数最高单项式是x^2y^3，它的次数是 5，有 4 个单项式，所以该整式是 5 次 4 项式
- 整式恒等定理：不论 x 取何值，两个整式的值都相等的前提是，两个整式的同类项系数相等，如无论 x 取何值，$a_1x^2+a_2x+a_3=b_1x^2+b_2x+b_3$，则$a_1=b_1$，$a_2=b_2$，$a_3=b_3$
- 整式加减：<u>先去括号，然后合并所有同类单项式</u>，<u>同类项合并时字母和指数不变，系数加减</u>，如$\frac{3}{2}x^2y-\frac{2}{3}x^2y-z^4+\frac{1}{6}yx^2+z^4=(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6})x^2y+(1-1)z^4=x^2y$
- 乘方公式：m、n 为有理数（即整数、<u>分数</u>，当非整数时需 a>0，b>0）：$(a^m)^n=a^{mn}$，$(abc)^n=a^nb^nc^n$，$(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$，$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$(切记：$a^m+a^n\neq a^{m+n}$)，$a^m\div a^n=a^{m-n}$(*须底数a相同*)，注意所有公式左=右，同时右=左，如$a^{m+n}=a^m\cdot a^n$，如$5^{\frac{2}{3}}\times5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=5^{\frac{7}{6}}$，$(8^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{4}}=8^{-\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}}=8^{-\frac{1}{6}}$
- 整式乘除：整式相乘，先用一个整式的每一项乘另一个整式中的每一项（使用乘方公式），再把积相加，然后合并同类项。



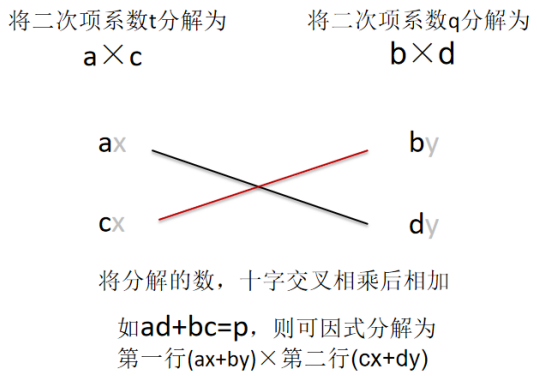
整式除以单项式，先用整式每一项除以单项式（使用乘方公式），再把商相加，然后合并同类项。如$(-\frac{2}{3}x^2y^3+\frac{3}{4}xy^2)(-2x^2y+xy^2)\div(-\frac{1}{2}xy)=(\frac{4}{3}x^4y^4-\frac{2}{3}x^3y^5-\frac{3}{2}x^3y^3+\frac{3}{4}x^3y^4)\div(-\frac{1}{2}xy)=-\frac{8}{3}x^3y^3+\frac{4}{3}x^2y^4+3x^2y^2-\frac{3}{2}x^2y^3$
- 乘法公式：平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，如$(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y)(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y)=(\frac{1}{2}x)^2-(\frac{2}{3}y)^2=\frac{1}{4}x^2-\frac{4}{9}y^2$，如$101\times99=(100+1)(100-1)=100^2-1^2=9999$，完全平方公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$，如$98^2=(100-2)^2=100^2-2\times100\times2+2^2=10000-400+4=9604$

8.2 因式分解

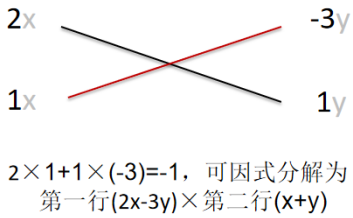
- 因式分解：如果整式 A、B、C 都含有 x，A=B×C，即把整式 A 写成几个次数更低的整式 B、C 的积，叫因式分解，B、C 是 A 的因式。<u>因式分解一般要分解到每个因式都不能再分解为止</u>，如$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$。
- 因式分解的意义：使因式 B、C=0 的 x 值，也会使 A=0，如$x^2-1=(x+1)(x-1)$，*如*$x+1=$

0，*即*$x=-1$，*则*$x^2-1=0\times(x-1)=0$，*同理*$x=1$，*则*$x^2-1=(x+1)\times 0=0$，*所以让因式*$=0$ *的*x*值，也会让整式*$=0$，*因此因式*$=0$ *的解，也是整式*$=0$ *的解*。由于因式中 x 的次数肯定小于整式中 x 的次数，所以求因式的解比求整式的解更简单，这是解整式方程的主要思路。

- 提取公因式法：提取整式中各单项式的共同因式，如$x(a-b)^2-y(b-a)^3=x(b-a)^2-y(b-a)^3=(b-a)^2(x-by+ay)$
- 乘法公式法：反向使用平方差公式$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$、完全平方公式$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$，如$(x+y)^2+8(x+y)+16=(x+y+4)^2$
- 十字相乘法：因为$(ax+by)(cx+dy)=acx^2+(ad+bc)xy+bdy^2$，如整式$tx^2+pxy+qy^2$，t 能分解成 a×c，q 能分解成 b×d，而 p 能分解成 ad+bc，则$tx^2+pxy+qy^2$能因式分解$(ax+by)(cx+dy)$，



，如 $2x^2-xy-3y^2$，



，

因此$2x^2-xy-3y^2=(2x-3y)(x+y)$

- 分组法：将所有单项式分为几组，各组内部先因式分解，然后各组之间因式分解，如$9a^2-3a+b-b^2=9a^2-b^2-3a+b=(3a-b)(3a+b)-(3a-b)=(3a-b)(3a+b-1)$

9 分式

9.1 分式

- 分式：<u>分母中有字母的代数式，当字母的值让分母为 0，则分式无意义</u>，如分式$\frac{1}{x}+1$，当 x=0 时无意义
- 性质：$\frac{A}{B}=\frac{A\times K}{B\times K}=\frac{A\div K}{B\div K}$（A、B、K 都是整式，K≠0），即分式的分子、分母都乘以或除以相同的整式，分式值不变
- 最简分式：分式的分子、分母可分别因式分解，然后分子、分母的公因式可以约分，当分子、分母没有公因式时，是最简分式，如$\frac{x^2-x-6}{x^2-9}=\frac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x+2}{x+3}$
- 分式乘除：$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}$，$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{A\times D}{B\times C}$，注意，结果要化为最简分式，如$\frac{2a-b}{a^2-2ab+b^2}\div\frac{4a^2-b^2}{ab^2-a^2b}=\frac{2a-b}{(a-b)^2}\times\frac{ab^2-a^2b}{4a^2-b^2}=\frac{2a-b}{(a-b)^2}\times\frac{ab(b-a)}{(2a-b)(2a+b)}=\frac{\cancel{2a-b}}{\cancel{(b-a)}^2}\times\frac{ab\cancel{(b-a)}}{\cancel{(2a-b)}(2a+b)}=\frac{ab}{(b-a)(2a+b)}$
- 分式加减：$\frac{B}{A}\pm\frac{C}{A}=\frac{B\pm C}{A}$，异分母的分式加减要先通分（公分母为所有分母的最小公倍式），如$\frac{y}{2x}+\frac{x}{y}-\frac{2x-1}{y^2}=\frac{y\times y^2}{2x\times y^2}+\frac{x\times 2xy}{y\times 2xy}-\frac{(2x-1)\times 2x}{y^2\times 2x}=\frac{y^3}{2xy^2}+\frac{2x^2y}{2xy^2}-\frac{4x^2-2x}{2xy^2}=\frac{y^3+2x^2y-4x^2+2x}{2xy^2}$
- $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{99\times 100}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$

- 假设 $\frac{1}{n(n+2)}=x(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})=x\frac{n+2-n}{n(n+2)}=\frac{2x}{n(n+2)}$，因此 $x=\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$，$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\ldots+\frac{1}{97\times99}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{97}-\frac{1}{99})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{99})=\frac{49}{99}$

9.2 分式方程

- 分式方程：分母含有未知数的方程是分式方程（分母不含未知数的方程是整式方程），分式方程的解法是方程两边乘以公分母，从而约分去掉分母，化为整式方程，求出解后要验根，舍去使分母为 0 的增根，如$\frac{x}{x-1}+1=\frac{1}{x-1}$，方程两边乘以 x-1，$\frac{x(x-1)}{x-1}+(x-1)=\frac{x-1}{x-1}$，$x+x-1=1$，x=1，代入方程验算，因为 x=1 使得分母为 0，故舍去，方程无解

10 实数

10.1 开平方

- $x^2=4$，则 x 是 4 的平方根或二次方根，求 4 的平方根叫对 4 开平方
- <u>正数有两个平方根</u>，4 的平方根是$\sqrt{4}$=2 和$-\sqrt{4}$=-2，$\sqrt{4}$是算术平方根，$-\sqrt{4}$是负平方根
- 0 的平方根是 0，即$\sqrt{0}=0$
- <u>负数无平方根</u>，如-4 无平方根，即没有 x，使得$x^2=-4$

10.2 开立方

- $x^3=-8$，则 x 是-8 的立方根或三次方根，求-8 的立方根叫对-8 开立方
- <u>正数或负数都有一个立方根</u>，-8 的立方根是$\sqrt[3]{-8}=-2$
- 0 的立方根是 0，即$\sqrt[3]{0}=0$
- <u>$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$，$\sqrt{5}\approx2.236$</u>

10.3 开方

- a 称为a^n的 n 次方根，$\sqrt[m]{a^n}$读作 a 的 n 次方的 m 次方根，$a=\sqrt[n]{a^n}$(n 为奇数)，$a=\pm\sqrt[n]{a^n}$(n 为偶数)，a^n是被开方数，n 是根指数
- m、n 为正整数（n>1，a>0）：$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$，$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$，如$\sqrt{18}\div\sqrt[3]{2}=\sqrt{9\times2}\div\sqrt[3]{2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}\div\sqrt[3]{2}=3\sqrt{2}\div\sqrt[3]{2}=3\times2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=3\times2^{\frac{1}{6}}=3\sqrt[6]{2}$

10.4 实数

- 实数包括有理数、无理数，所有实数可用数轴上一个点表示，数轴上每个个点就是一个实数
- 有理数：0、正负有限小数、正负无限循环小数（有限小数、无限循环小数可以写成分数$\frac{a}{b}$，a、b 为整数）
- 无理数：正负无限不循环小数，如π（无限不循环小数不能写成分数$\frac{a}{b}$，a、b 为整数）
- 实数运算：所有规则和有理数一样（包括绝对值），运算顺序先括号，<u>括号内乘方/开方，再乘除，最后加减</u>，<u>如果题目要求计算结果保留若干位小数，则无理数取近似小数计算，否则保留无理数</u>

10.5 科学计数法

- 很大的数如-320000000，可写成-3.2×10^8；很小的数如-0.0000000019，可写成-1.9×10^{-9}，从而节约空间且不易写错
- 科学计数法：$a\times10^n$，$1\le|a|<10$，a 是整数或小数，n 为整数，a=1 或-1 时，可省略 a
- 已知数字，写成科学记数法：小数点从现在的位置向左移动 n 位，直到小数点左边的数字在 1 ≤ a < 10 或 -10 < a ≤ -1 之间，如-39889.23=-3.988923×10^4（小数点向左移动了 4 位）

- 当原来的数较大时，n 表示原数小数点左边有 n+1 个数字（整数位）
- 当原来的数较小时，n 表示原数从小数点向右到第一个非 0 数字之间有 n 个数字

10.6 近似数

- 准确数：完全准确，符合实际的数
- 近似数（近似值）：与准确数接近到一定程度的数，近似数的近似程度叫精确度，精确度有两种：
- 精确到某位：精确到哪位，该位就是要保留的最后一个数字，如果要求精确到十位及以上位时，如 13500 精确到千位，则只能保留万位和千位两个数字，而百位四舍五入，因此千位变成 4，只能留下 14 两个数字，因此要么后面加单位，如 1.4 万，要么用科学计数法写成1.4×10^4；如果要求精确到个位或小数位，则可以不加单位，不用科学计数法，如 π精确到百分位，四舍五入为 3.14
- 保留几个有效数字：从左边第一个不是 0 的数字起，往右直到末位数字的所有数字是有效数字，如果保留的最后一位有效数字是十位及以上位时，需要加单位或用科学计数法表示，如 3485.26 保留三个有效数字，则保留到十位，个位四舍五入，保留的数字为 349，可加单位即 0.349 万，或用科学计数法3.49×10^3；如果保留的最后一个有效数字是个位或小数位，则可以不加单位，不用科学计数法，如 π保留五个有效数字，四舍五入为 3.1416

11 二次根式

11.1 二次根式

- 含有根号的代数式称为根式，只含有平方根（二次方根）的代数式称为二次根式
- <u>$\sqrt{x}$有意义的前提是 x≥0</u>
- $(\sqrt{x})^2=x$，x≥0
- $\sqrt{x^2}=|x|$，（因为$x^2\geq0$，*所以$\sqrt{x^2}$总是有意义，且$\sqrt{\ }$是算数平方根，一定≥0*）
- $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$，a≥0，b≥0
- $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$，a≥0，b>0

11.2 最简二次根式

- 最简二次根式：<u>根号内各因式、素因数的指数为 1，且根号内无分母或分母无根号</u>，如$\sqrt{42a}=\sqrt{2\times3\times7\times a}$，*根号内因式$a$和各素因数的指数都是 1，所以是最简二次根式*
- 将二次根式化简为最简二次根式的方法：
  - 将$\sqrt{\ }$*内的完全平方素因数、完全平方因式，移到$\sqrt{\ }$外*，如$\sqrt{18}=\sqrt{2\times3^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3^2}=3\sqrt{2}$
  - 将$\sqrt{\ }$内的分母去掉或移到$\sqrt{\ }$外，如$\sqrt{\frac{b^2}{9a}}$，*因为二次根式有意义，所以$a>0$，所以*$\sqrt{\frac{b^2}{9a}}=\sqrt{\frac{b^2\cdot a}{9a^2}}=\frac{|b|\sqrt{a}}{3a}$
  - 将分母的$\sqrt{\ }$去掉（即分母有理化），如$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，其中$(\sqrt{3}+\sqrt{2})$*和*$(\sqrt{3}-\sqrt{2})$互为有理化因式，即两个二次根式相乘后不再含有根号
- 同类二次根式：如果两个<u>最简</u>二次根式的根号内相同，则它们是同类二次根式
- 二次根式运算：先化简各二次根式，然后合并同类二次根式并化简

12 一元二次方程

12.1 一元二次方程的一般形式

- 只有一个未知数且未知数的最高次数是 2 的整式方程：$ax^2+bx+c=0$，ax^2是二次项，a 是二次项系数（a≠0），bx 是一次项，b 是一次项系数，c 是常数项，最多有两个实数x_1、x_2，是方程的实数根或根

12.2 一元二次方程的解法

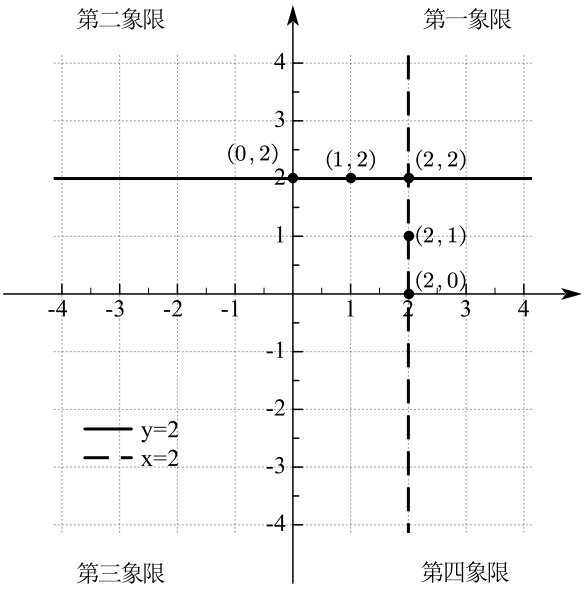
- 因式分解法：将一元二次方程因式分解为两个一次因式相乘=0，如 3(x-2)=5$(x-2)^2$，因式分解为：(x-2)(3-5x+10)=0，(x-2)(13-5x)=0，因此 x-2=0 或 13-5x=0，因此$x_1=2$，$x_2=\frac{13}{5}$
- 开方法：形如$ax^2+c=0$的一元二次方程，变形为$x^2=-\frac{c}{a}$，如果$\frac{c}{a}<0$，方程有两个实根$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$，$x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$；如果 c=0，方程有一个实根 0；如果$\frac{c}{a}>0$，方程无实根。如$(x+5)^2=12$，则$x+5=\pm2\sqrt{3}$，$x_1=-5+2\sqrt{3}$，$x_2=-5-2\sqrt{3}$
- 配方法：将方程写成左边为完全平方整式，右边为常数，然后使用开方法，如$x^2-2x=4$，$x^2-2x+1=4+1$，$(x-1)^2=5$，$x-1=\pm\sqrt{5}$，$x=1\pm\sqrt{5}$
- 公式法（求根公式）：$ax^2+bx+c=0$的一元二次方程一般形式（a≠0），变形为$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$，$x^2+2\times\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a}$，$(x+\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a}$，$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，$\Delta=b^2-4ac$是一元二次方程的判别式，如果$\Delta>0$，有两个不同实根，$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；如果$\Delta=0$，有相同的实根（重根），$x=-\frac{b}{2a}$；如果$\Delta<0$，无实根。如$y(y+4)=8$，$y^2+4y-8=0$，因为$\Delta=4^2-4\times1\times(-8)=48>0$，方程有两个不同实根，$y=\frac{-4\pm\sqrt{48}}{2}=-2\pm2\sqrt{3}$
- 韦达定理：一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（a≠0）两个实根$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$，$x_1=x_2$时也成立。如$2x^2+6x-3=0$，求$(x_1-x_2)^2$，而$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=9+4\times\frac{3}{2}=15$
- 二次三项式在实数范围的因式分解：如果二次三项式$ax^2+bx+c=0$，$a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]=a(x-x_1)(x-x_2)$，因此如果二次三项式$\Delta\geq0$，则可因式分解为$a(x-x_1)(x-x_2)$，如果$\Delta<0$，则在实数范围无法因式分解。例如在实数范围因式分解$2x^2+4x-3$，因为$\Delta=16+4\times2\times3=40>0$，$x=\frac{-4\pm\sqrt{40}}{4}=-1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$，所以$2x^2+4x-3=2(x+1-\frac{\sqrt{10}}{2})(x+1+\frac{\sqrt{10}}{2})$；如果是二次三项式$ax^2+bxy+cy^2=0$，$a(x^2+\frac{b}{a}xy+\frac{c}{a}y^2)=a[x^2-(x_1+x_2)xy+x_1x_2y^2]=a(x-x_1y)(x-x_2y)$
- 可化为一元二次方程的分式方程：先两边乘以分母最小公倍式，去所有分母，化为一元二次方程，<u>求解后要验根（舍去使最小公倍式为 0 的增根）</u>，如$\frac{x}{x-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$，方程两边乘以最小公倍式(x-1)(x+1)，$x(x+1)=2$，$x^2+x-2=0,x_1=-2,x_2=1$，由于$x_2=1$使得最小公倍式为 0，是增根，应舍去
- 一元二次方程应用题：列方程，判断是否有根，求出根后要舍去无意义的根。一条长 15km 道路，整治后车辆通行速度提高了 3km/h，车辆通过时间少 15 min，求整治后车辆通过时间是多少？设整治后通过

时间为 t 小时，列方程$\frac{15}{t}-\frac{15}{t+\frac{15}{60}}=3$，两边乘以$t(t+0.25)$，$5(t+0.25)-5t=t(t+0.25)$，$4t^2+t-5=0,\Delta=1+4\times4\times5=81>0,x=\frac{-1\pm9}{8},x_1=-\frac{5}{4}$，$x_2=1$，由于$x_1$为负数不符合实际意义，应舍去

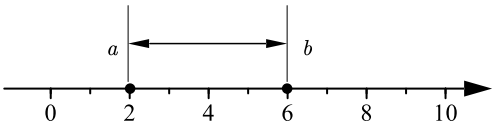
13 平面直角坐标系

13.1 平面直角坐标系

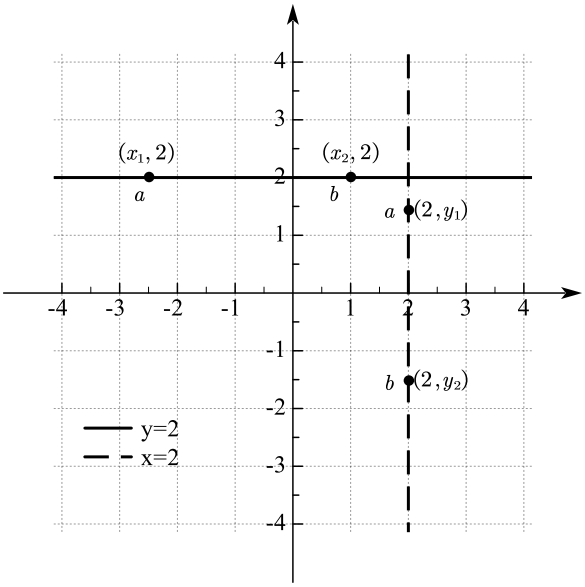
- 平面直角坐标系：在平面上经过点 O 做两条垂直直线，O 为坐标原点，横向数轴为坐标轴 x，向右为正，纵向数轴为坐标轴 y，向上为正，两条坐标轴将坐标系分成 4 个象限，每一个实数对(x,y)可用坐标系中的一个点(x,y)表示，(x,y)是点的坐标，x 是横坐标，y 是纵坐标
- 坐标轴 x 上的点，y=0；坐标轴 y 上的点，x=0；经过点(a,b)且垂直 x 轴的直线可表示为 x=a，该直线上所有点的 x=a；经过点(a,b)且垂直 y 轴的直线可表示为 y=b，该直线上所有点的 y=b

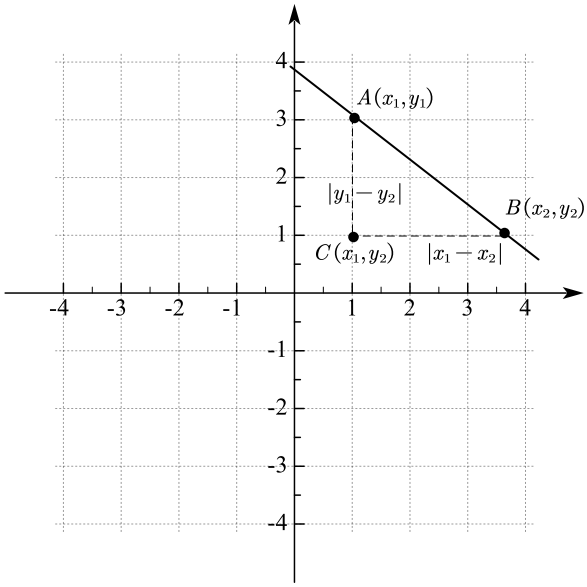


13.2 坐标系中点的运动

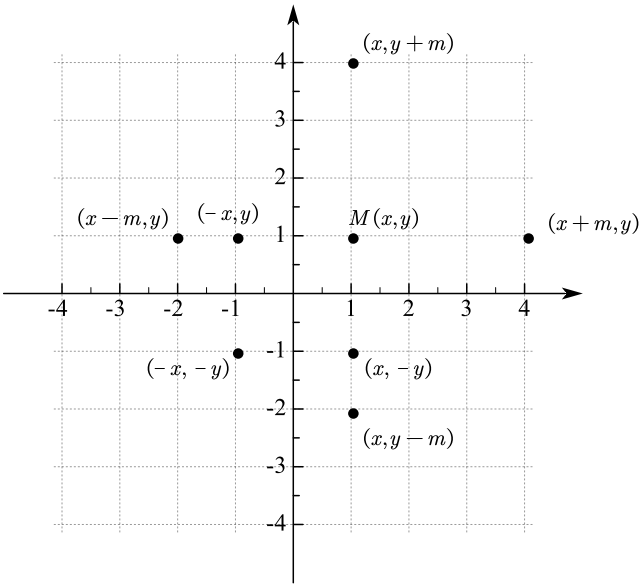


- 在数轴上，点 a 和点 b 的距离=|a-b|=|2-6|=4
- 在坐标系中，直线 y=2 上的点 a$(x_1,2)$和点 b$(x_2,2)$的距离=$|x_1-x_2|$，在直线 x=2 上的点 a$(2,y_1)$和点 b$(2,y_2)$的距离=$|y_1-y_2|$，根据勾股定理（直角三角形斜边的平方=两直角边的平方和），任意两点 A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2)的距离为$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$





- 点 M(x,y)沿着平行于 x 轴和 y 轴的方向平移 m 个单位长度（m>0），则向右平移的新坐标为(x+m,y)，向左平移的新坐标为(x-m,y)，向上平移的新坐标为(x,y+m)，向下平移的新坐标为(x,y-m)
- 点 M(x,y)关于 x 轴对称点的坐标(x,-y)，关于 y 轴对称点的坐标(-x,y)，关于原点对称点的坐标(-x,-y)



14 正反比例函数

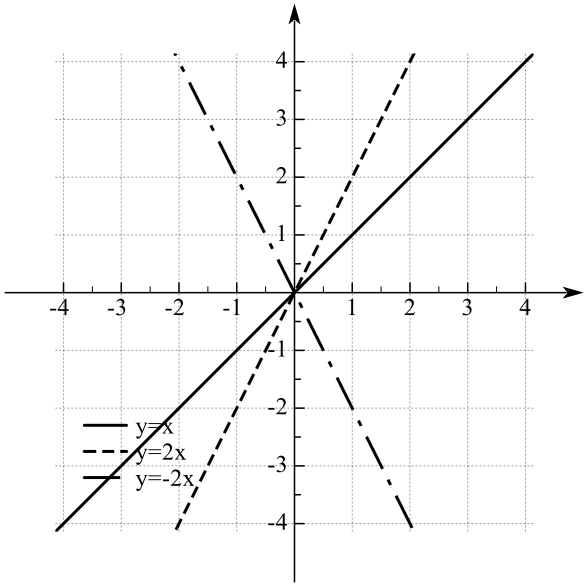
14.1 函数

- 函数：圆的面积公式$s = \pi r^2$，其中π是数值不变的常数，当 r 取一个值时，s 有对应的唯一值，r 称为自变量，s 称为因变量或函数，而$s = \pi r^2$是函数解析式，自变量 r 的允许取值范围叫函数的定义域，这里定义域是 r>0，一般用 f(x)代表自变量 x 的函数，x 是自变量，当自变量 x=a 时，函数值是 f(a)，如函数 $f(x) = \pi x^2$，x=2 时，$f(2) = \pi \times 2^2 = 4\pi$
- 常值函数：y=m，或 f(x)=m，即无论自变量 x 的值是多少，y 都等于固定值 m
- 函数表示法：函数的每个 x 值与对应 y 值都有相同计算式时，函数可用解析式表示，有些函数的不同 x 值与对应 y 值的没有计算式，则函数用列表法、图像法等表示

14.2 正比例函数

- 正比例函数：y=kx，或 f(x)=kx，k 是不为 0 的常数，叫比例系数，x 是自变量，定义域是一切实数，例如正比例函数 f(x)=-4x，比例系数为-4，f(0)=-4×0=0，f(3)=-4×3=-12
- 正比例函数的图像：假如把 y=kx 的 x 和 y 看成是平面直角坐标系中的点(x,y)，可将每个 x 和对应 y 的点标出来，这些点连成了函数在坐标系上的图像，显示了每个 x 和 y 的位置，正比例函数 y=kx 的图像是经过原点(0，0)和点(1，k)的一条直线，该直线上的所有点符合 y(横坐标)=kx(纵坐标)，而 y=kx 的所有 x

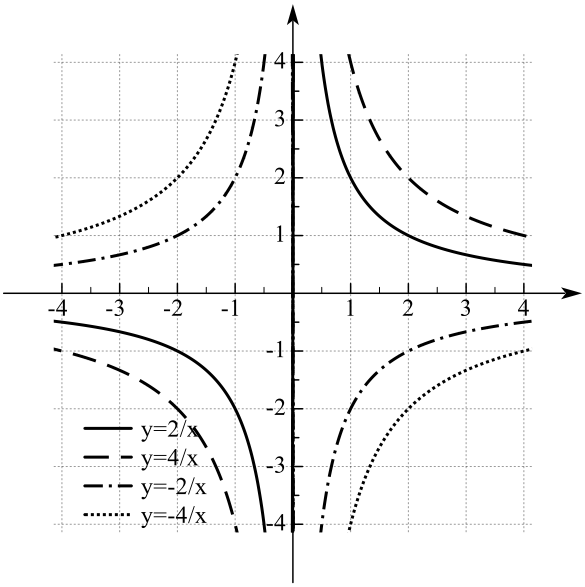
和对应 y 的点(x,y)都在该直线上，可将该直线称为 y=kx



- 当 k>0 时，图像经过第一、三象限，自变量 x 越大，y 也越大
- 当 k<0 时，图像经过第二、四象限，自变量 x 越大，y 则越小（越负）

14.3 反比例函数

- 反比例函数：$y=\frac{k}{x}$，k 是≠0 的常数，也叫比例系数，x 是自变量，定义域是≠0 的一切实数，例如反比例函数$f(x)=\frac{18}{x}$，比例系数是 18，f(2)=$\frac{18}{2}=9$
- 反比例函数的图像：列出若干个 x 值和 y 值，在坐标系中标出它们，然后用光滑线段连接，得到反比例函数的图像是两条曲线（双曲线）



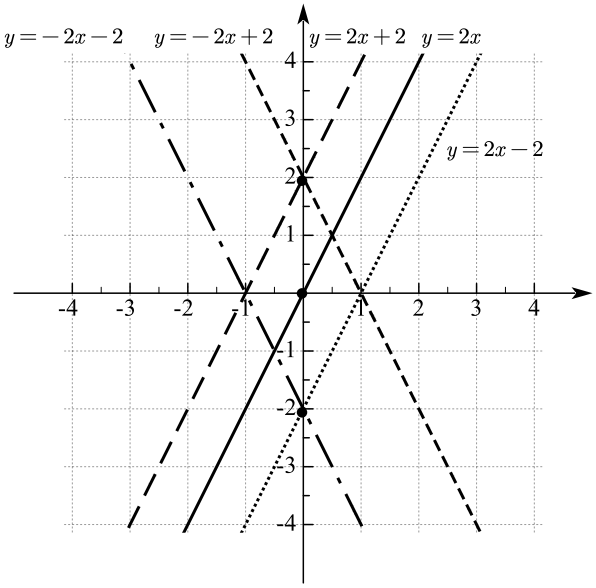
- 当 k>0 时，两条曲线分别在第一、三象限，在每个象限内，自变量 x 越大，y 则越小
- 当 k<0 时，两条曲线分别在第二、四象限，在每个象限内，自变量 x 越大，y 也越大
- 两条曲线的两端都无限接近于 x 轴和 y 轴，但不会与 x 轴和 y 轴相交

15 一次函数

15.1 一次函数

- 一次函数：y=kx+b，或 f(x)=kx+b，k 和 b 是常数，k≠0，k 称为斜率，b 称为截距，x 是自变量，定义域是一切实数，当 b=0 时，y=kx 即正比例函数，因此正比例函数是一次函数的特例
  - 当 k>0 时，

- 一次函数的图像：y=kx+b 的图像是一条经过点(0,b)和点($-\frac{b}{k}$,0)的直线，(0,b)是直线与 y 轴的交点，($-\frac{b}{k}$,0)是直线与 x 轴的交点（y=kx+b，令 y=0，则 x=$-\frac{b}{k}$）
- 斜率 k 相同的一次函数互相平行，如$y=kx+b_1$、$y=kx+b_2$、$y=kx$三条直线平行，b_1、b_2、0是它们与 y 轴交点的纵坐标，y=kx 在 y 轴方向平移b_1个单位长度可得到 y=$kx+b_1$



  - 当 k>0 时，自变量 x 越大，y 也越大
  - 当 k<0 时，自变量 x 越大，y 则越小（越负）
  - 当 k>0 且 b>0 时，直线在第一、二、三象限
  - 当 k>0 且 b<0 时，直线在第一、三、四象限
  - 当 k<0 且 b>0 时，直线在第一、二、四象限
  - 当 k<0 且 b<0 时，直线在第二、三、四象限

16 代数式方程

16.1 整式方程

- 一元整式方程：包括一元一次、一元二次、一元高次（未知数次数≥3）整式方程，都含有一个未知数且方程两边是整式，如 3x+5=0，$x^2+x-2=0$，$x^3-10x^2+25x-12=0$，方程中各项的系数是数字，叫数字系数方程，其解法已学过，如果各项系数有字母（非未知数），则是字母系数方程，如(3a-2)x=2(3-x)，系数中含有字母 a
  - 字母系数整式方程：解法同数字系数方程，解的过程中，如果方程两边除以带字母项时，要判断该项是否可能为 0，方程两边要开方时，要判断被开方数是否可能小于 0，解完要确定字母各取值范围的解，如(3a-2)x=2(3-x)，3ax=6，x=$\frac{2}{a}$，当 a≠0 时解为$\frac{2}{a}$，当 a=0 时，方程无解；如$ax+b^2=bx+a^2$，(a-b)x=a^2-b^2，(a-b)x=(a-b)(a+b)，如果 a-b≠0，即 a≠b，方程两边除以 a-b，x=a+b，如果 a=b，则方程解为任意实数；如$bx^2-1=1-x^2$，(b+1)x^2=2，如果 b+1≠0，即 b≠-1，方程两边除以 b+1，$x^2=\frac{2}{b+1}$，如果 b+1>0，即 b>-1，$x=\pm\sqrt{\frac{2}{b+1}}$，因此如果 b>-1，x 解为$\pm\sqrt{\frac{2}{b+1}}$，如果 b≤-1，方程无解
  - 一元高次二项方程：只有一个未知数项和一个常数项的一元高次方程，一般形式为$ax^n+b=0$（a≠0，b≠0，n 为正整数），$x^n=-\frac{b}{a}$，则如果 n 为奇数，则$x=-\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$，如果 n 为偶数，则当$\frac{b}{a}$≤0 时，$x=\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$，当$\frac{b}{a}$>0 时，方程无解

- 双二次方程：只含有未知数 4 次和 2 次项的一元四次方程，一般形式为$ax^4+bx^2+c=0$（a≠0），<u>可使用换元法将 4 次降到 2 次</u>，$x^4+5x^2-24=0$，假设$y=x^2$，$y^2+5y-24=0$，(y-3)(y+8)=0，y=3 或-8，即x^2 =3 或-8，其中-8 舍去，$x^2=3$，$x=\pm\sqrt{3}$
- 一元高次方程：能使用因式分解法降次的高次方程，如$2x^3+x^2-6x=0$，$x(2x^2+x-6)=0$，$x(2x-3)(x+2)=0$，x=0 或-2 或$\frac{3}{2}$

16.2 分式方程

- 分式方程：之前方法是，方程两边乘以相同的整式，去掉分母，转化为整式方程，求解后要验根（包括使得两边乘以为 0 整式的增根，应用题无实际意义的根），除此之外，特殊的分式方程可使用换元法降次，如$\frac{2}{x^2}+x^2=3$，假设$y=x^2$，$\frac{2}{y}+y=3$，两边乘以 y，$2+y^2=3y$，$y^2-3y+2=0$，$(y-2)(y-1)=0$，y =2 或 1，$x^2=2$或 1，$x=\pm1$或$\pm\sqrt{2}$，经过检验没有增根

16.3 无理方程

- 无理方程：整式方程和分式方程统称有理方程，方程中含有根式且根号内有未知数的方程，是无理方程，将方程两边平方，可以去掉根号，转化为有理方程，求解后要验根（因为方程两边平方，去掉根号，但原本根号内必须≥0），如$\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=1$，$\sqrt{x+2}=\sqrt{x}+1$，两边平方，$x+2=x+2\sqrt{x}+1$，$\sqrt{x}=\frac{1}{2}$，$x=\frac{1}{4}$，经检验，$\frac{1}{4}$是方程的根

16.4 二元二次方程组

- 二元二次方程：含有两个未知数且未知数最高次数为 2 的整式方程，一般形式是$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$
- 二元二次方程组：含有两个未知数，方程是整式方程，未知数最高次数为 2 的方程组，各方程的公共解是方程组的解，<u>基本思路是消元法，先去掉一个未知数，求出另一个未知数，或用因式分解法从 2 次降为 1 次</u>
  - 如果其中一个方程是二元一次方程，另一个是二元二次方程，则可使用代入消元法，将一个未知数用另一个未知数表示，然后代入二元二次方程，如$\begin{cases}4x^2-9y^2=15①\\2x-3y=5②\end{cases}$，由②得到$x=\frac{3y+5}{2}$，代入①，得到 3y+1=0，$y=-\frac{1}{3}$，x=2，经验算，方程组的解为$\begin{cases}x=2\\y=-\frac{1}{3}\end{cases}$，本例也可以这样求解：$\begin{cases}(2x-3y)(2x+3y)=15①\\2x-3y=5②\end{cases}$，将②代入①，得到$\begin{cases}(2x+3y=3①\\2x-3y=5②\end{cases}$，解为$\begin{cases}x=2\\y=-\frac{1}{3}\end{cases}$
  - 如果两个方程都是二元二次方程，可对其中一个因式分解，得出两个二元一次方程，分别与另一个二元二次方程联立求解，如$\begin{cases}x^2-3xy+2y^2=0①\\x^2+y^2=5②\end{cases}$，方程①因式分解为(x-2y)(x-y)=0，因此 x=2y 或 x=y，分别与方程②联立，得到$\begin{cases}x=2y\\x^2+y^2=5\end{cases}$和$\begin{cases}x=y\\x^2+y^2=5\end{cases}$，第一个方程组的解为$\begin{cases}x_1=\frac{\sqrt{10}}{2}\\y_1=\frac{\sqrt{10}}{2}\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=-\frac{\sqrt{10}}{2}\\y_1=-\frac{\sqrt{10}}{2}\end{cases}$，第二个方程组的解为$\begin{cases}x_1=2\\y_1=1\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=-2\\y_1=-1\end{cases}$，原方程有 4 组解
  - 又如$\begin{cases}x^2-9y^2=0①\\x^2-2xy-y^2=4②\end{cases}$，方程①得到(x-3y)(x+3y)=0，因此 x=3y 或 x=-3y，方程②得到$(x-y)^2$ =4，因此(x-y)=±2，x=y+2 或 x=y-2，4 个解联立，$\begin{cases}x=3y\\x=y+2\end{cases}$，$\begin{cases}x=3y\\x=y-2\end{cases}$，$\begin{cases}x=-3y\\x=y+2\end{cases}$，

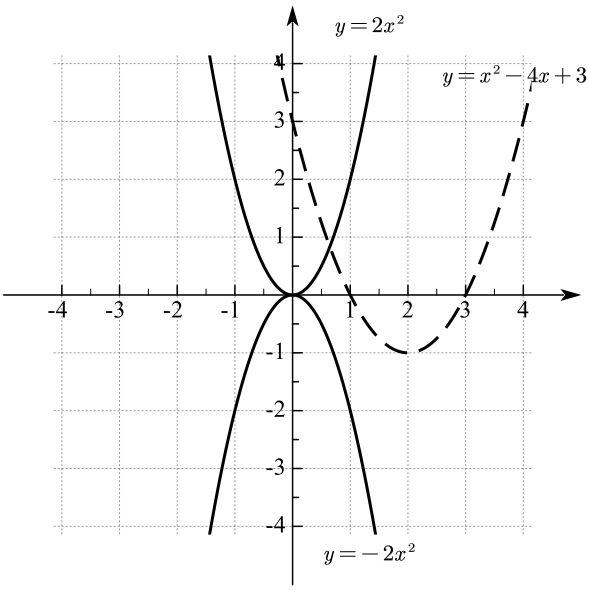
$\begin{cases} x=-3y \\ x=y-2 \end{cases}$，最后解为$\begin{cases} x_1=\frac{3}{2} \\ y_1=-\frac{1}{2} \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=-\frac{3}{2} \\ y_2=\frac{1}{2} \end{cases}$，$\begin{cases} x_3=3 \\ y_3=1 \end{cases}$，$\begin{cases} x_4=-3 \\ y_4=-1 \end{cases}$

16.5 应用题

- 求解后，要验根，舍去无实际意义的根

17 二次函数

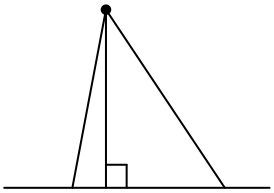
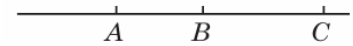
- 二次函数：形如$y=ax^2+bx+c$或$f(x)=ax^2+bx+c$（a、b、c 为常数且 a≠0），称为二次函数，x 是自变量，定义域为一切实数
- 二次函数$y=ax^2$的图像：是一条抛物线，对称轴是直线 x=0（即 y 轴），顶点是原点，a>0 时，开口向上，顶点是最低点，a<0 时，开口向下，顶点是最高点
- 二次函数$y=ax^2+k$的图像：是一条抛物线，对称轴是直线 x=0（即 y 轴），顶点是点(0,k)，a>0 时，开口向上，顶点是最低点，a<0 时，开口向下，顶点是最高点；将抛物线$y=ax^2$上下平移 k 个单位长度，即得到抛物线$y=ax^2+k$
- 二次函数$y=a(x+m)^2$的图像：是一条抛物线，对称轴是直线 x=-m（平行于 y 轴），顶点是点(-m,0)，a>0 时，开口向上，顶点是最低点，a<0 时，开口向下，顶点是最高点；将抛物线$y=ax^2$左右平移 m 个单位长度，即得到抛物线$y=a(x+m)^2$
- 二次函数$y=a(x+m)^2+k$的图像：是一条抛物线，对称轴是直线 x=-m（平行于 y 轴），顶点是点(-m,k)，a>0 时，开口向上，顶点是最低点，a<0 时，开口向下，顶点是最高点；将抛物线$y=ax^2$上下平移 k 个单位长度，左右平移 m 个单位长度，即得到抛物线$y=a(x+m)^2+k$
- 二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像：使用配方法，将ax^2+bx+c配方成$a(x+m)^2+k$，$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，$m=\frac{b}{2a}$，$k=\frac{4ac-b^2}{4a}$，因此抛物线$y=ax^2+bx+c$的对称轴是$x=-\frac{b}{2a}$，顶点是点$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$，a>0 时，开口向上，顶点是最低点，a<0 时，开口向下，顶点是最高点；将抛物线$y=ax^2$上下平移$\frac{4ac-b^2}{4a}$个单位长度，左右平移$-\frac{b}{2a}$个单位长度，即得到抛物线$y=ax^2+bx+c$



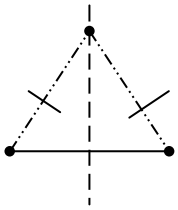
二、几何

1 线

- 直线：经过一点有无数条直线，经过两点只有一条直线，直线向两端无限延伸，射线向一端无限延伸，线段两端固定

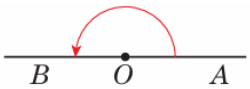
- 线段：两点之间线段最短，该线段长度就是两点的距离，一般用两个端点的字母表示线段，直线外一点与直线上各点的连接线段中，垂线段最短 
- 线段的和、差：如果一条线段的长度等于另外两条线段长度的和（或差），那么称这条线段就是另外两条线段的和（或差）， 

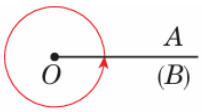
，AC=AB+BC，AC-BC=AB，AC-AB=BC
- 线段的垂直平分线：将一条线段分成两条相等线段的点是线段的中点，线段是轴对称图形，对称轴是它的垂直平分线，垂直平分线是过线段中点的垂线，垂直平分线上的任意一点到线段两个端点的距离相等；和一条线段两个端点距离相等的点，都在线段的垂直平分线上



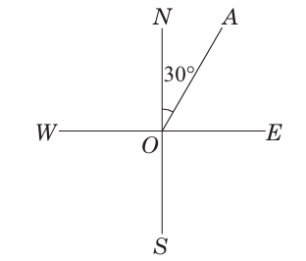
2 角

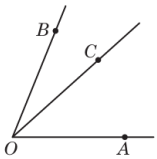
- 角：一条射线绕端点旋转到另一个位置所成的图形，当两条射线呈一条直线时是平角（180°），两条射线重合时是周角（360°）



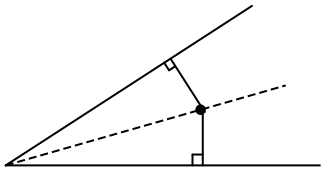


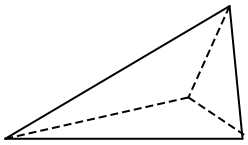
- 角度：1° = 60′（分），1′ = 60″（秒），48°56′37″读作 48 度 56 分 37 秒，180°-(35°18′ + 62°56′) =180°-98°14′=179°60′-98°14′=81°46′
- 方向：以正北、正南方向为基准，用角度来描述物体的方向，如北偏东 30°，南偏西 25°，图中 A 点在北偏东 30°的方向

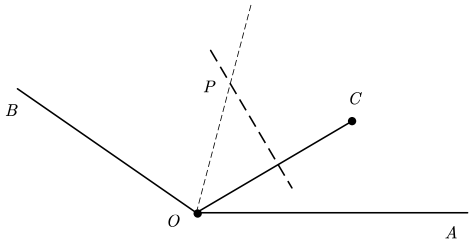


- 角的和、差： 

$\angle BOC + \angle AOC = \angle AOB$，$\angle AOB - \angle AOC = \angle BOC$，$\angle AOB - \angle BOC = \angle AOC$
- 余角：如果两个角和等于 90°，称为互为余角（互余），其中一个角称为另一个角的余角，同角或等角的余角相等
- 补角：如果两个角的和等于 180°，称为互为补角（互补），其中一个角称为另一个角的补角，同角或等角的补角相等
- 角平分线：角是轴对称图形，对称轴是角平分线，即从一个角的顶点引出一条射线，把这个角分成两个相等的角，角平分线上的点到角两边的直线的距离相等，到角两边直线的距离相等的点都在角平分线上

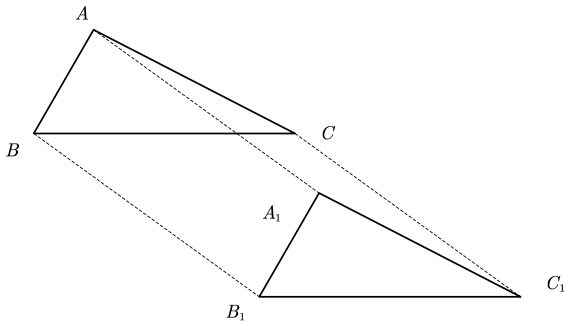


- 三角形内心：三角形的三条内角平分线相交于一点，即内心 
- 交轨作图法：先找出符合一部分作图要求的点的轨迹，再找出符合另一部分作图要求的点的轨迹，两个轨迹的交点就是所求，如已知∠AOB 和其内的一点 C，求作点 P，使 PC=PO，且点 P 到 OA 和 OB 的距离相等，解：首先连接 OC，作线段 OC 的垂直平分线，其次作出∠AOB 的角平分线，两条线交点即为 P

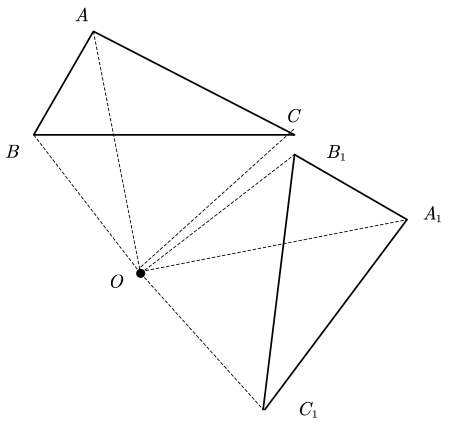


3 图形的运动

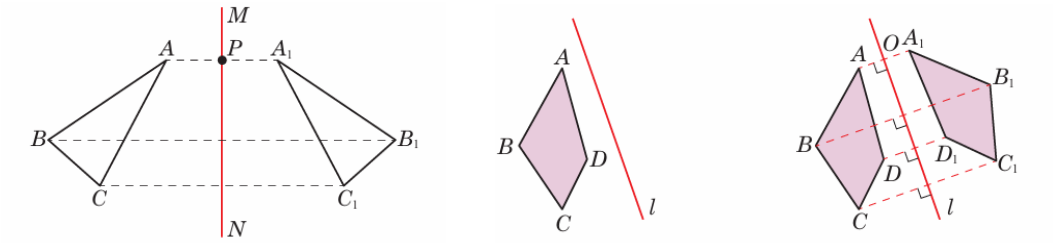
- 平移：将图形的所有点按某方向移动相同距离，如三角形 ABC 右移 4 格，下移 3 格，得到$A_1B_1C_1$，ABC 和$A_1B_1C_1$形状相同且大小相等，对应点的连线平行如$\mathrm{AA_1} \parallel \mathrm{BB_1} \parallel \mathrm{CC_1}$或在一条直线上且$\mathrm{AA_1} = \mathrm{BB_1} = \mathrm{CC_1} =$平移距离，对应角相等如$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{A_1}$，$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{B_1}$，$\angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{C_1}$，对应线段平行如$\mathrm{AB} \parallel \mathrm{A_1B_1}$，$\mathrm{AC} \parallel \mathrm{A_1C_1}$，$\mathrm{BC} \parallel \mathrm{B_1C_1}$或在一条直线上且$\mathrm{AB} = \mathrm{A_1B_1}$，$\mathrm{AC} = \mathrm{A_1C_1}$，$\mathrm{BC} = \mathrm{B_1C_1}$



- 旋转：将图形的所有点绕点 O 顺时针或逆时针转动一个角度，点 O 叫旋转中心，角度叫旋转角，如将三角形 ABC 绕 O 点顺时针旋转 90 度，得到$A_1B_1C_1$，ABC 和$A_1B_1C_1$形状相同且大小相等，对应点到旋转中心的距离相等如$\mathrm{AO} = \mathrm{A_1O}$，$\mathrm{BO} = \mathrm{B_1O}$，$\mathrm{CO} = \mathrm{C_1O}$，每组对应点与旋转中心连线的角的角度相等如$\angle \mathrm{AOA_1} = \angle \mathrm{BOB_1} = \angle \mathrm{COC_1}$，对应线段的长度相等如$\mathrm{AB} = \mathrm{A_1B_1}$，$\mathrm{AC} = \mathrm{A_1C_1}$，$\mathrm{BC} = \mathrm{B_1C_1}$，对应角的大小相等如$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{A_1}$，$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{B_1}$，$\angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{C_1}$

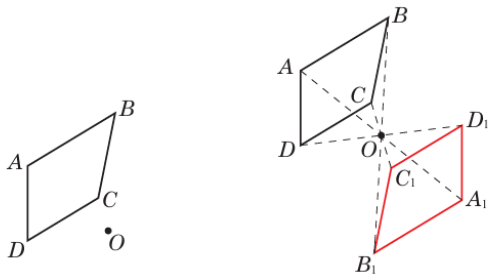


- 轴对称：将一个图形沿直线 MN 翻折，该图形在 MN 两边的部分重合（称为轴对称图形），或者该图形与另一个图形重合，则直线 MN 是对称轴，图形关于 MN 对称，重合点称为关于直线 MN 的对称点，线段、角、正方形和圆是轴对称图形，如三角形 ABC 沿着直线 MN 翻折后，与三角形$A_1B_1C_1$重合，ABC 与$A_1B_1C_1$关于直线 MN 成轴对称，直线 MN 是对称轴，点 A 与点A_1、点 B 与点B_1、点 C 与点C_1是关于直线 MN 的对称点；ABC 与$A_1B_1C_1$形状相同，大小相等，对应线段相等如$\mathrm{AB}=\mathrm{A_1B_1}$，$\mathrm{AC}=\mathrm{A_1C_1}$，$\mathrm{BC}=\mathrm{B_1C_1}$，对应角相等如$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{A_1}$，$\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{B_1}$，$\angle\mathrm{C}=\angle\mathrm{C_1}$，连接对称点的线段和对称轴垂直并且被对称轴平分，如$\mathrm{AA_1}\perp\mathrm{MN}$，$\mathrm{AP}=\mathrm{PA_1}$，如要画出四边形 ABCD 关于直线 L 成轴对称的图形，只需要分别从 A、B、C、D 点作对称轴的垂线段且长度平分即可确定A_1、B_1、C_1、D_1



，

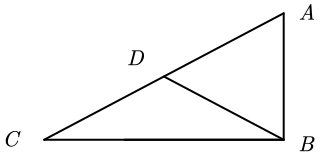
- 中心对称：如果一个图形的所有点绕着点 O 旋转 180°后，与原图形重合（称为中心对称图形），或与另一个图形重合，点 O 是对称中心，图形关于点 O 成中心对称，如四边形 ABCD 绕点 O 旋转 180°后与$A_1B_1C_1D_1$重合，ABCD 和$A_1B_1C_1D_1$形状相同，大小相等，重合点称为关于点 O 的对称点，如点 A 和A_1是关于点 O 的对称点，对应线段平行如$\mathrm{AB}\parallel\mathrm{A_1B_1}$，$\mathrm{BC}\parallel\mathrm{B_1C_1}$，$\mathrm{CD}\parallel\mathrm{C_1D_1}$，$\mathrm{DA}\parallel\mathrm{D_1A_1}$，或在同一直线上且相等如$\mathrm{AB}=\mathrm{A_1B_1}$，$\mathrm{BC}=\mathrm{B_1C_1}$，$\mathrm{CD}=\mathrm{C_1D_1}$，$\mathrm{DA}=\mathrm{D_1A_1}$，连接每组对称点的线段都经过对称中心，

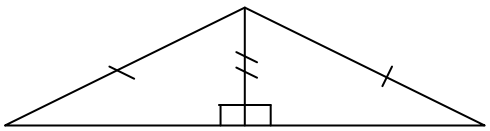


如$\mathrm{AA_1}$经过点 O，并且被对称中心平分，如$\mathrm{AO}=\mathrm{OA_1}$

4 直角三角形

- 直角三角形写为$\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ABC}$，直角三角形的两个锐角互余，两个锐角互余的三角形是直角三角形

- 勾股定理：直角三角形斜边的平方=两直角边的平方和，即斜边>任一直角边；一边的平方=另两边的平方和，则是直角三角形，勾股数有：$1^2+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2, 3^2+4^2=5^2, 5^2+12^2=13^2, 7^2+24^2=25^2, 8^2+15^2=17^2, 10^2+24^2=26^2, 15^2+20^2=25^2, 20^2+21^2=29^2$
- 

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，AD=CD=DB，$\angle A=\angle ABD, \angle C=\angle CBD$；如果∠C=30°，则ΔABD 是等边三角形，AB（30°所对直角边）=AD=CD=DB；反之，如果 AB 是 AC 的一半，则∠C=30°（该直角边所对角）
- 
直角三角形的斜边和一条直角边相等，则直角三角形全等